数理解析研究所講究録 第2092巻 2018年 32-41



# 荒川・金子ゼータ関数の類似とある種の多重ゼータ関数について

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科　梅澤　瞭太
Ryota Umezawa
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

**概要**

伊藤拓馬氏は荒川・金子ゼータ関数の類似の関数の性質を使って Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値の間の関係式を証明した．本稿では伊藤氏の類似の方法を使って宮川氏が導入した多重ゼータ関数の特殊値の関係式が得られることを紹介する．

## 1　導入

まずは荒川・金子 [1] で導入された荒川・金子ゼータ関数と伊藤 [2] で導入された荒川・金子ゼータ関数の類似の関数 (本稿では伊藤ゼータ関数と呼ぶ) についての背景や知られている結果を簡単に述べる．

### 1.1　(Euler-Zagier 型) 多重ゼータ値と荒川・金子ゼータ関数について

(Euler-Zagier 型) 多重ゼータ値とは次の関数の特殊値である．

**定義 1** ((Euler-Zagier 型) 多重ゼータ関数)**.** $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{C}$ に対し

$$\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_n} \frac{1}{m_1^{s_1} m_2^{s_2} \cdots m_n^{s_n}}$$

と定義する．

この関数は任意の $k$ $(0 \leq k \leq n-1)$ に対し $\sum_{i=0}^{k} \Re(s_{n-i}) > k+1$ を満たすとき絶対収束し，$\mathbb{C}^n$ 上の有理型関数に解析接続できることが知られている．(Euler-Zagier 型) 多重ゼータ関数の正の整数点 $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $k_n \geq 2$ での値を (Euler-Zagier 型) 多重ゼータ値と呼ぶ．(Euler-Zagier 型) 多重ゼータ値の間には多くの関係式が成り立つことが知られており，荒川・金子 [1] では次の関係式が示されている．

**定理 1** ([1, Corollary 11])**.** $m, r \in \mathbb{N}, k \geq 2$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_k=m \\ a_j \geq 0}} \binom{a_k+r}{r} \zeta(a_1+1, \ldots, a_{k-1}+1, a_k+r+1) \\
&+ (-1)^k \sum_{\substack{a_1+\cdots+a_k=r \\ a_j \geq 0}} \binom{a_k+m}{m} \zeta(a_1+1, \ldots, a_{k-1}+1, a_k+m+1) \\
&= \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \zeta(\{1\}^{r-1}, k-j) \zeta(\{1\}^{m-1}, 2+j)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $\{k\}^n$ は $\underbrace{k,\ldots,k}_{n}$ を表す．

この関係式の証明には荒川・金子ゼータ関数と呼ばれる次の関数の性質が用いられた．

**定義 2** (荒川・金子ゼータ関数)**.** $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n$ と $\Re(s)>1-n$ を満たす $s\in\mathbb{C}$ に対し，

$$\xi(\mathbf{k};s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(1-e^{-t})}{e^t-1}\,dt$$

と定義する．ここで $\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ は多重ポリログ

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)=\sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_n}\frac{z^{m_n}}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_n^{k_n}}\qquad(|z|<1)$$

である．

荒川・金子ゼータ関数は $\mathbb{C}$ 上の正則関数に解析接続できることが知られている．荒川・金子ゼータ関数は負の整数点に多重ベルヌーイ数が現れる関数として定義された関数であるが，定理 1 をはじめとして多重ゼータ値への応用がいくつもある．

## 1.2 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値と伊藤氏の結果について

Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値とは次の関数の特殊値である．

**定義 3** (Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数)**.** $s_1,s_2,\ldots,s_r,s_{r+1}\in\mathbb{C}$ に対し

$$\zeta_{MT}(s_1,\ldots,s_r;s_{r+1})=\sum_{m_1=1,\ldots,m_r=1}^{\infty}\frac{1}{m_1^{s_1}\cdots m_r^{s_r}(m_1+\cdots+m_r)^{s_{r+1}}}$$

と定義する．

この関数は任意の $j=1,2,\ldots,r$ と $1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le r$ に対し，$\sum_{l=1}^{j}\Re(s_{k_l})+\Re(s_{r+1})>j$ を満たすとき絶対収束し，$\mathbb{C}^{r+1}$ 上の有理型関数に解析接続できることが知られている．Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の収束する非負の整数点 $(k_1,\ldots,k_r;k_{r+1})\in\mathbb{Z}_{\ge0}^{r+1}$ での値を Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値と呼ぶことにする．

伊藤 [2] では荒川・金子 [1] と類似の方法を使って，次の Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値の間の関係式が証明されている．

**定理 2** ([2, Corollary 9])**.** $r,m\in\mathbb{N}$ に対し，

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}\frac{(-1)^j\zeta(2)^{r-1-j}}{m!}\zeta_{MT}(\{2\}^j,\{1\}^m;1)\\&=\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}(m+1)_j\zeta_{MT}(\{2\}^{r-1-j},\{1\}^j,0;m+1+j)\end{aligned}$$

が成り立つ．

伊藤 [2] ではこの関係式を証明するために次の荒川・金子ゼータ関数の類似の関数が導入された．

**定義 4** (伊藤ゼータ関数)**.** $k_1,\ldots,k_r\in\mathbb{N}$ と $\Re(s)>1-r$ を満たす $s\in\mathbb{C}$ に対し，

$$\xi_{MT}(k_1,\ldots,k_r;s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{\prod_{i=1}^{r}\mathrm{Li}_{k_i}(1-e^{-t})}{e^t-1}\,dt$$

と定義する.

伊藤ゼータ関数は $\mathbb{C}$ 上の正則関数に解析接続できることが示されている.

伊藤氏は次の二つの定理を示すことによって定理 2 を証明した.

**定理 3** ([2, Proposition 5]). $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\xi_{MT}(k_1, \ldots, k_r; m+1) = \frac{1}{m!}\zeta_{MT}(k_1, \ldots, k_r, \{1\}^m; 1).$$

が成り立つ.

**定理 4** ([2, Theorem 8]). $r \in \mathbb{N}$ と $s \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}(-1)^j\zeta(2)^{r-1-j}\Gamma(s)\xi_{MT}(\{2\}^j; s)\\&=\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}\Gamma(s+j)\zeta_{MT}(0, \{2\}^{r-1-j}, \{1\}^j; j+s).\end{aligned}$$

が成り立つ.

定理 3 は伊藤ゼータ関数の特殊値と Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値の関係式を表していて, 定理 4 は伊藤ゼータ関数と Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数との関数関係式を表している. そして伊藤氏は定理 4 の $s$ に $m+1$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を代入し, 左辺の $\xi_{MT}$ に定理 3 を使うことで定理 2 を得た.

## 2 問題の背景と主結果

荒川・金子 [1] では (Euler-Zagier 型) 多重ゼータ値の間の関係式が証明せれ, 伊藤 [2] では Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値の間の関係式が証明された. そこで, 彼らの類似の方法から Euler-Zagier 型や Mordell-Tornheim 型以外の多重ゼータ値の間の関係式を証明できないかという問題を考察する. 特に, 本稿では宮川 [3] で導入された次の多重ゼータ関数 (宮川型多重ゼータ関数と呼ぶ) の特殊値の間の関係式を得ることについて考察する.

**定義 5** (宮川型多重ゼータ関数). $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{C}$ と $s_{r+1,1} \ldots, s_{r+1,n_{r+1}} \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\zeta_{MT}(s_1, \ldots, s_r; s_{r+1,1}, \ldots, s_{r+1,n_{r+1}})\\&=\sum_{0<m_1,\ldots,0<m_r}\ \sum_{m_{r+1,1}=1,\ldots,m_{r+1,n_{r+1}-1}=1}^{\infty}\\&\frac{1}{m_1^{s_1}\cdots m_r^{s_r}\prod_{u=1}^{n_{r+1}}(\sum_{v=1}^{r}m_v+\sum_{w=1}^{u-1}m_{r+1,w})^{s_{r+1,u}}}.\end{aligned}$$

と定義する.

宮川型多重ゼータ関数は $\mathbb{C}^{r+1}$ 上の有理型関数に解析接続できることが示されている. また, 宮川型多重ゼータ関数は任意の $k = 1, \ldots, n_{r+1} - 2$ に対し, $\sum_{i=0}^{k}\Re(s_{r+1,n_{r+1}-i}) > k+1$ を満たし, さらに, 任意の $j = 1, 2, \ldots, r$ と $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_j \leq r$ に対し, $\sum_{l=1}^{j}\Re(s_{k_l}) + \sum_{i=0}^{n_{r+1}-1}\Re(s_{r+1,n_{r+1}-i}) - n_{r+1} + 1 > j$ を満たすとき絶対収束する ([4, Proposition 1]). 宮川型多重ゼータ関数の収束する非負の整数点を宮川型多重ゼータ値と呼ぶ.

ここでは伊藤氏の方法に基づいて宮川型ゼータ値の関係式を証明する. 伊藤氏の方法は次の三つのことを行えばよいことに注意する.

(i) 荒川・金子ゼータ関数の類似の関数を定義する.
(ii) (i) で定義した関数の特殊値とある型の多重ゼータ値の関係式を証明する.
(iii) (i) で定義した関数とある型の多重ゼータ関数の関数関係式を証明する.

最後に, (iii) で得た関数関係式に整数を代入し, (i) で定義した関数の特殊値に対して (ii) で得た関係式を使うことでその型の多重ゼータ値の関係式が得られる.

本稿ではこの方法に沿って宮川型多重ゼータ値の間の関係式の証明を行う.

## 2.1 宮川型多重ゼータ値に対応する荒川・金子ゼータ関数の類似の関数

宮川型多重ゼータ値に対応する荒川・金子ゼータ関数の類似の関数として次の関数を定義する.

**定義 6** (一般伊藤ゼータ関数 $(r=1)$). $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n$, $k_{n+1}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\Re(s)>1-n$ を満たす $s\in\mathbb{C}$ に対し,

$$\xi_{MT}((\mathbf{k};k_{n+1});s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}\mathrm{Li}_{\mathbf{k};k_{n+1}}(1-e^{-t})\,dt \tag{1}$$

と定義する. ここで, $\mathrm{Li}_{\mathbf{k};k_{n+1}}(z)$ は

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k};k_{n+1}}(z)=\sum_{m_1=1,\ldots,m_n=1}^{\infty}\frac{z^{\sum_{j=1}^{n}m_j}}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}(\sum_{j=1}^{n}m_j)^{k_{n+1}}}\quad(|z|<1)$$

である.

伊藤氏は関数 (1) の $\mathrm{Li}_{\mathbf{k};k_{n+1}}(1-e^{-t})$ を $\mathrm{Li}_{\mathbf{k};k_{n+1}}(1-e^{-t})$ の形の関数の $r$ 個の積に変えた関数を定義し ([2, Definition 13]), さらにその関数が $\mathbb{C}$ 上の正則関数に解析接続できることを示している. したがって関数 (1) を一般伊藤ゼータ関数 $(r=1)$ と呼び, また一般伊藤ゼータ関数 $(r=1)$ も $\mathbb{C}$ 上の正則関数に解析接続できる. 一般伊藤ゼータ関数 $(r=1)$ は後に示すように宮川型多重ゼータ関数 (値) との関係があるが, 一般伊藤ゼータ関数 $(r=1)$ と宮川型多重ゼータ関数 (値) の関係については伊藤 [2] では触れられていない.

## 2.2 一般伊藤ゼータ関数 $(r=1)$ の特殊値と宮川型多重ゼータ値との関係

一般伊藤ゼータ関数 $(r=1)$ の特殊値と宮川型多重ゼータ値には次のような関係がある.

**定理 5** ([4, Theorem 5]). $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n$, $k_{n+1}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\xi_{MT}((\mathbf{k};k_{n+1});m+1)\\&=\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_{k_{n+1}+1}=m\\ a_j\geq 0}}\frac{1}{a_{k_{n+1}+1}!}\zeta_{MT}(\{1\}^{a_{k_{n+1}+1}},k_1,\ldots,k_n;{}_-((a_1+1,\ldots,a_{k_{n+1}}+1,2)^*))\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, ${}_-\mathbf{k},\mathbf{k}^*$ はそれぞれ

$$\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)=(\{1\}^{a_1-1},b_1+1,\{1\}^{a_2-1},b_2+1,\ldots,\{1\}^{a_h-1},b_h+1)$$

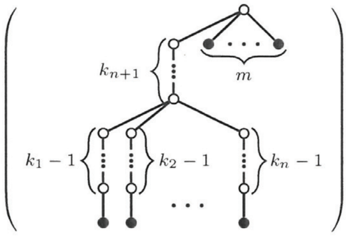
に対し,

$$\begin{aligned}{}_-\mathbf{k}&=(k_1-1,k_2,\ldots,k_n),\\ \mathbf{k}^*&=(\{1\}^{b_h-1},a_h+1,\{1\}^{b_{h-1}-1},a_{h-1}+1,\ldots,\{1\}^{b_1-1},a_1+1)\end{aligned}$$

を表す.

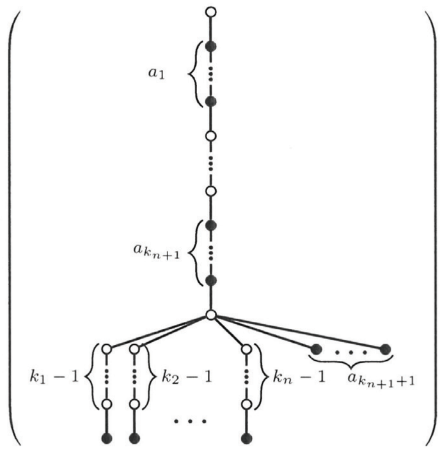
証明の概要. [4] では 2 通りの証明方法を与えているが, ここでは山本 [5] で定義されている山本積分を使った証明の概要を説明する. 山本積分を使うと一般伊藤ゼータ関数 ($r=1$) の特殊値は

$$\xi_{MT}((\mathbf{k};k_{n+1});m+1)=\frac{1}{m!}I$$



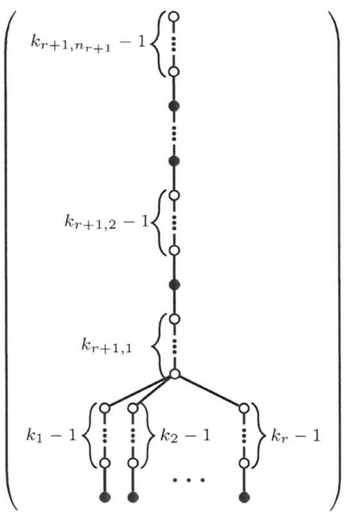

と表される. ここで $m$ 個の黒丸と $k_{n+1}+1$ 個の白丸に順序を入れると右辺は

$$\sum_{a_1+\cdots+a_{k_{n+1}+1}=m}\frac{1}{a_{k_{n+1}+1}!}I$$




となる. 一方, 宮川型多重ゼータ値は

$$\zeta_{MT}(k_1,\ldots,k_r;k_{r+1,1},\ldots,k_{r+1,n_{r+1}})=I$$




と表されるので定理 5 を得る. □

## 2.3 一般伊藤ゼータ関数 $(r=1)$ と宮川型多重ゼータ関数との関係

一般伊藤ゼータ関数 $(r=1)$ と宮川型多重ゼータ関数には次のような関数関係式がある.

**定理 6** ([4, Theorem 6]). $l, k \in \mathbb{N}$ と $s \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\zeta(2)^l \zeta(\{1\}^k, s) + \sum_{j=1}^{l} \binom{l}{j} \zeta(2)^{l-j}(-1)^j \left( \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \zeta_{MT}(\{2\}^j; i) \zeta(\{1\}^{k-i}, s) + (-1)^k \xi_{MT}((\{2\}^j; k); s) \right)$$
$$= \sum_{\substack{a+b_1+\cdots+b_{k+1}=l \\ a, b_j \geq 0}} \frac{l!}{a!} \binom{s+b_{k+1}-1}{b_{k+1}} \zeta_{MT}(0, \{2\}^a, \{1\}^{l-a}; b_1+1, \ldots, b_k+1, b_{k+1}+s)$$

が成り立つ.

証明の概要.

$$J = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty t_{k+1}^{s-1} \left( \prod_{i=1}^{l} \frac{u_i + t_1 + \cdots + t_{k+1}}{e^{u_i + t_1 + \cdots + t_{k+1}} - 1} \right)$$
$$\times \frac{1}{e^{t_1 + \cdots + t_{k+1}} - 1} \frac{1}{e^{t_2 + \cdots + t_{k+1}} - 1} \cdots \frac{1}{e^{t_{k+1}} - 1} du_1 \cdots du_l dt_1 \cdots dt_{k+1}$$

とおきこれを二通りの方法で計算する.

一つ目の方法は積分を内側から順に計算する方法である. まず, $u_1, \ldots, u_l$ について積分すると

$$J = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty t_{k+1}^{s-1} \left( \zeta(2) - \mathrm{Li}_2(1 - e^{-(t_1 + \cdots + t_{k+1})}) \right)^l$$
$$\times \frac{1}{e^{t_1 + \cdots + t_{k+1}} - 1} \frac{1}{e^{t_2 + \cdots + t_{k+1}} - 1} \cdots \frac{1}{e^{t_{k+1}} - 1} dt_1 \cdots dt_{k+1}$$

となる. これの $\left( \zeta(2) - \mathrm{Li}_2(1 - e^{-(t_1 + \cdots + t_{k+1})}) \right)^l$ の部分を展開し, $t_1, \ldots, t_k$ の順に部分積分することで

$$J = \Gamma(s) \zeta(2)^l \zeta(\{1\}^k, s)$$
$$+ \Gamma(s) \sum_{j=1}^{l} \binom{l}{j} \zeta(2)^{l-j} (-1)^j \left( \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \zeta_{MT}(\{2\}^j; i) \zeta(\{1\}^{k-i}, s) + (-1)^k \xi_{MT}((\{2\}^j; k); s) \right)$$

を得る.

二つ目の方法は多項展開による方法である. $\prod_{i=1}^{l} u_i + t_1 + \cdots + t_{k+1}$ を多項展開することで

$$J = \sum_{a+b_1+\cdots+b_{k+1}=l} \frac{l!}{a! b_1! \cdots b_{k+1}!} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty t_{k+1}^{s-1} u_1 \cdots u_a t_1^{b_1} \cdots t_{k+1}^{b_{k+1}}$$
$$\times \left( \prod_{i=1}^{l} \frac{1}{e^{u_i + t_1 + \cdots + t_{k+1}} - 1} \right) \left( \prod_{i=1}^{k+1} \frac{1}{e^{t_i + \cdots + t_{k+1}} - 1} \right) du_1 \cdots du_l \, dt_1 \cdots dt_{k+1}$$
$$= \sum_{\substack{a+b_1+\cdots+b_{k+1}=l \\ a, b_j \geq 0}} \frac{l! \Gamma(b_{k+1}+s)}{a! b_{k+1}!} \zeta(0, \{2\}^a, \{1\}^{l-a}; 1+b_1, \ldots, 1+b_k, b_{k+1}+s)$$

となり, 定理が得られる. □

最後に定理 6 の $s$ に $m+1$ $(m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を代入し, 左辺の $\xi_{MT}((\{2\}^j; k); s)$ に対し定理 5 を使うことで宮川型多重ゼータ値の関係式を得ることができる.

## 3　主結果の拡張

定理 4 や定理 6 の左辺は $\xi_{MT}$ の和の形になっており, さらに $\xi_{MT}$ の添え字には 2 しか現れていない. しかし, 定理 4 や定理 6 は一つの $\xi_{MT}$ に対しての関数関係式に書き直すことができ, さらに一般の添え字に拡張できるのでここではそれを紹介する.

そのためには次の関数を導入する必要がある

**定義 7** (一般 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数). $\mathbf{s}_i = (s_{i,1}, \ldots, s_{i,n_i}) \in \mathbb{C}^{n_i}$ $(1 \le i \le r+1,\ n_i \in \mathbb{N})$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{MT}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_r; \mathbf{s}_{r+1}) \\
&= \sum_{\substack{0<m_{1,1}<m_{1,2}<\cdots<m_{1,n_1} \\ \vdots \\ 0<m_{r,1}<m_{r,2}<\cdots<m_{r,n_r}}} \sum_{m_{r+1,1}=1,\ldots,m_{r+1,n_{r+1}-1}=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{n_i} m_{i,j}^{s_{i,j}} \prod_{u=1}^{n_{r+1}} (\sum_{v=1}^{r} m_{v,n_v} + \sum_{w=1}^{u-1} m_{r+1,w})^{s_{r+1,u}}} \\
&= \sum_{\substack{0<m_{1,1},0<m_{1,2},\ldots,0<m_{1,n_1} \\ \vdots \\ 0<m_{r,1},0<m_{r,2},\ldots,0<m_{r,n_r}}} \sum_{m_{r+1,1}=1,\ldots,m_{r+1,n_{r+1}-1}=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^{r}\prod_{k=1}^{n_i} (\sum_{j=1}^{k} m_{i,j})^{s_{i,k}} \prod_{u=1}^{n_{r+1}} (\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} m_{i,j} + \sum_{w=1}^{u-1} m_{r+1,w})^{s_{r+1,u}}}.
\end{aligned}
$$

と定義する. この関数の収束する非負の整数点を一般 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値と呼ぶ.

一般 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数は Mordell-Tornheim 型, 宮川型多重ゼータ関数を含むことに注意する. 一般 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数は

(i)

$$
\begin{aligned}
&\Re(s_{i,j}) \ge 1 && (1 \le i \le r, 1 \le j \le n_r), \\
&\sum_{i=0}^{k} \Re(s_{r+1,n_{r+1}-i}) > k+1 && (0 \le k \le n_{r+1}-2), \\
&\sum_{i=0}^{n_{r+1}-1} \Re(s_{r+1,n_{r+1}-i}) > n_{r+1}-1,
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{s_1} = (0), \\
&\Re(s_{i,j}) \ge 1 && (2 \le i \le r, 1 \le j \le n_r), \\
&\sum_{i=0}^{k} \Re(s_{r+1,n_{r+1}-i}) > k+1 && (0 \le k \le n_{r+1}-1)
\end{aligned}
$$

のどちらかを満たすならば絶対収束する ([4, Proposition 2]). また, 一般 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数は $\mathbb{C}^{n_1+\cdots+n_{r+1}}$ 上の有理型関数に解析接続できる ([4, Remark 9]).

定理 4 と定理 6 はそれぞれ一般 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数を用いて次のように拡張できる.

**定理 7** ([4, Theorem 7]). $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k_i \geq 2$ $(1 \leq i \leq r)$ と $s \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\xi_{MT}(\{1\}^l, k_1, \ldots, k_r; s) \\
&= \sum_{\substack{0 \leq j_1 \leq 2k_1 - 2 \\ \vdots \\ 0 \leq j_r \leq 2k_r - 2}} a_r(\mathbf{j}, \mathbf{k}) \frac{\Gamma(l + b_r(\mathbf{j}, \mathbf{k}) + s)}{\Gamma(s)} \zeta_{MT}(0, \mathbf{k}(j_1, k_1), \ldots, \mathbf{k}(j_r, k_r); l + b_r(\mathbf{j}, \mathbf{k}) + s)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし $a_r(\mathbf{j}, \mathbf{k})$, $b_r(\mathbf{j}, \mathbf{k})$, $\mathbf{k}(j_i, k_i)$ はそれぞれ

$$a_r(\mathbf{j}, \mathbf{k}) = \prod_{i=1}^{r} a(j_i, k_i), \qquad a(j_i, k_i) = \begin{cases} (-1)^{j_i} \zeta(k_i - j_i) & (j_i < k_i - 1), \\ (-1)^{k_i - 1} & (j_i \geq k_i - 1), \end{cases}$$

$$b_r(\mathbf{j}, \mathbf{k}) = |\{i \in \{1, \ldots, r\} \mid j_i = k_i - 1\}|,$$

$$\mathbf{k}(j_i, k_i) = \begin{cases} (\{1\}^{j_i}) & (j_i \leq k_i - 1), \\ (\underbrace{\{1\}^{j_i - k_i}, 2, \{1\}^{2k_i - 2 - j_i}}_{k_i - 1}) & (j_i > k_i - 1) \end{cases}$$

である.

**定理 8** ([4, Theorem 8]). $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 2}^n$, $k_{n+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $s \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&(-1)^{k_{n+1}} \xi_{MT}((\{1\}^l, \mathbf{k}; k_{n+1}); s) \\
&= \sum_{\substack{0 \leq j_1 \leq 2k_1 - 2 \\ \vdots \\ 0 \leq j_n \leq 2k_n - 2}} \sum_{c_1 + \cdots + c_{k_{n+1}+1} = l + b_n(\mathbf{j}, \mathbf{k})} (l + b_n(\mathbf{j}, \mathbf{k}))! a_n(\mathbf{j}, \mathbf{k}) \binom{s + c_{k_{n+1}+1} - 1}{c_{k_{n+1}+1}} \\
&\quad \times \zeta_{MT}(0, \mathbf{k}(j_1, k_1), \ldots, \mathbf{k}(j_n, k_n); c_1 + 1, \ldots, c_{k_{n+1}} + 1, c_{k_{n+1}+1} + s) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k_{n+1}} (-1)^{i-1} \zeta_{MT}(\{1\}^l, \mathbf{k}; i) \zeta(\{1\}^{k_{n+1} - i}, s)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

定理 7 と定理 8 の $s$ に $m + 1$ $(m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を代入し, 左辺にそれぞれ定理 3 と定理 5 を使うことで一般 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値の間の関係式が得られることに注意しておく.

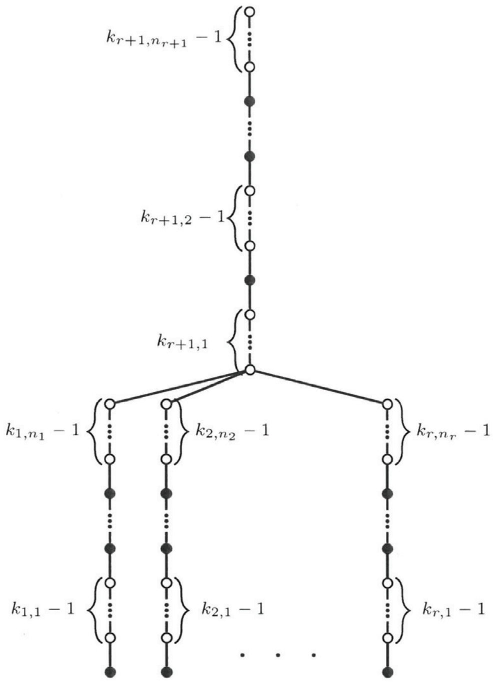
## 4　主結果についての考察

荒川氏, 金子氏, 伊藤氏そして筆者の結果から Euler-Zagier 型, Mordell-Tornheim 型, 宮川型, さらに一般 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値の間の関係式を得ることができたが, これらの型の多重ゼータ値はすべて山本積分で表示できるという共通点がある. 例えば一般 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値は次のように山本

積分で表示できる.

$$\zeta_{MT}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_r;\mathbf{k}_{r+1})$$

$$= I\Bigg($$




$$\Bigg).$$

Euler-Zagier 型, Mordell-Tornheim 型, 宮川型多重ゼータ値は一般 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値に含まれているため, この表示を特殊化することで Euler-Zagier 型, Mordell-Tornheim 型, 宮川型多重ゼータ値の山本積分表示も得られる.

一方, 一般に山本積分で表示できないと思われる多重ゼータ値として Apostol-Vu 型多重ゼータ値がある. Apostol-Vu 型多重ゼータ値とは次の Apostol-Vu 型多重ゼータ関数の特殊値である.

**定義 8** (Apostol-Vu 型多重ゼータ関数). $s_1,\ldots,s_r,s_{r+1}\in\mathbb{C}$ に対し,

$$\zeta_{AV}(s_1,\ldots,s_r;s_{r+1})=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{1}{m_1^{s_1}\cdots m_r^{s_r}(m_1+\cdots+m_r)^{s_{r+1}}}$$

と定義する. この関数の収束する非負の整数点を Apostol-Vu 型多重ゼータ値と呼ぶ.

筆者は以前に Apostol-Vu 型多重ゼータ値の関係式を得るために伊藤氏の結果の類似を試みたが, 特殊値に Apostol-Vu 型多重ゼータ値が現れ, Apostol-Vu 型多重ゼータ関数と関数関係式を持つような荒川・金子ゼータ関数の類似の関数をうまく見つけることができなかった. このように, 特殊値が山本積分で表示できるかどうかが伊藤氏の類似の方法が適用できるかどうかにかかわっていると思われる. つまり山本積分で表示できる型の多重ゼータ値であればこれまでの結果の拡張や類似を行うことでその型の多重ゼータ値の間の関係式が得られると思われ, 逆に山本積分で表示できない型の多重ゼータ値に関してはこれまでの結果の類似から関係式を得るのは難しいのではないかと思われる.

## 参考文献


[1] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions,* Nagoya Math. J. **153** (1999), 189–209.

[2] T. Ito, *On analogues of the Arakawa-Kaneko zeta functions of Mordell-Tornheim type,* Comment. Math. Univ. St. Pauli **65** (2016), 111–120.

[3] T. Miyagawa, *Analytic properties of generalized Mordell-Tornheim type of multiple zeta-function and L-function,* Tsukuba J. Math. **40** (2016), 81–100.

[4] R. Umezawa, *On an analog of the Arakawa-Kaneko zeta function and relations of some multiple zeta values,* `arXiv:1803.11441`.

[5] S. Yamamoto, *Multiple zeta-star values and multiple integrals,* `arXiv:1405.6499`.